# "ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο" (ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ)

## Μερικές παράγωγοι

Έστω $f: U \to \mathbb{R}$ με $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό, $\bar{x}_0 = (x_0^{(1)}, \ldots, x_0^{(n)}) \in U$

πχ

$n=2$, $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Η μερική παράγωγος της $f$ στο σημείο $(x_0, y_0)$ ως προς $x$, είναι η $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) =$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

Και αντίστοιχα η μερική παράγωγος της $f$ στο $(x_0, y_0)$ ως προς το $y$ είναι η $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) =$

$$= \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y+h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

- $(x_0, y_0+h) = (x_0, y_0) + (0, h) = (x_0, y_0) + h(0,1)$ → το μοναδιαίο $e_2$

άρα $$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f((x_0, y_0) + h \cdot e_2) - f(x_0, y_0)}{h}$$

- $(x_0+h, y_0) = (x_0, y_0) + (h, 0) = (x_0, y_0) + h(1,0)$ → το μοναδιαίο $e_1$

άρα $$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f((x_0, y_0) + h\bar{e}_1) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

## ΟΡΙΣΜΟΣ 1:

Έστω $f: U \to \mathbb{R}$ με $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό, $\bar{x}_0 = (x_0^{(1)}, \ldots, x_0^{(n)}) \in U$ τότε η $f$ λέγεται μερικώς διαφορίσιμη ως προς την μεταβλητή $x^{(i)}$ στο $\bar{x}_0$, εάν

$$\exists \frac{\partial f}{\partial x^{(i)}}(\bar{x}_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\bar{x}_0 + h \cdot \bar{e}_i) - f(\bar{x}_0)}{h} \in \mathbb{R}$$

το οποίο ονομάζεται μερική παράγωγος ως προς $x^{(i)}$ στο $\bar{x}_0$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2:

Η f λέγεται μερικώς διαφορίσιμη στο $\bar{x}_0$ αν υπάρχουν όλες οι μερικές παράγωγοι ως προς κάθε μεταβλητή $x^{(i)}$, $i=1,2,\dots,n$ δηλ. $\exists\ \frac{\partial f}{\partial x^{(i)}}(\bar{x}_0)\in\mathbb{R}$ και το διάνυσμα

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x^{(1)}}(\bar{x}_0),\ \dots,\ \frac{\partial f}{\partial x^{(n)}}(\bar{x}_0)\right) =: \mathrm{grad}\, f(\bar{x}_0)$$

και ονομάζεται κλίση της f στο $\bar{x}_0$ και το συμβολίζουμε επίσης με $\nabla f(\bar{x}_0)$
(ανάδελτα)

ΟΡΙΣΜΟΣ 3

Η f θα λέγεται μερικώς διαφορίσιμη ως προς τη $x^{(i)}$ μεταβλητή, εαν $\exists\ \frac{\partial f}{\partial x^{(i)}}(\bar{x}_0)\in\mathbb{R}$ $\forall \bar{x}_0\in U$
Τότε, η $\frac{\partial f}{\partial x^{(i)}}: U\to\mathbb{R}$ ονομάζεται μερική παράγωγος της f ως προς τη $x^{(i)}$

ΟΡΙΣΜΟΣ 4

Η $f: U\to\mathbb{R}$ λέγεται μερικώς διαφορίσιμη, εαν είναι μερικώς διαφορίσιμη ως προς τη $x^{(i)}$ σε κάθε σημείο $\bar{x}_0\in U$ και $\forall i=1,2,\dots,n$ δηλ. όταν υπάρχει η κλίση της f σε κάθε $\bar{x}_0$: $\nabla f: U\to\mathbb{R}$

με $\nabla f(\bar{x}_0)=\left(\frac{\partial f}{\partial x^{(1)}}(\bar{x}_0),\dots,\frac{\partial f}{\partial x^{(n)}}(\bar{x}_0)\right)\in\mathbb{R}^n$

οποία μπορεί να γραφεί ως εξής: $\nabla f=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)=\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right)f$

ΟΡΙΣΜΟΣ 5

Η f ονομάζεται συνεχώς διαφορίσιμη αν υπάρχουν όλες οι μερικές παράγωγοι ως προς $x_i$ (σε κάθε σημείο του U) και $\frac{\partial f}{\partial x_i}: U\to\mathbb{R}$ και συνεχείς $\forall i=1,2,\dots,n$
Δηλ. $f\in C^1(U)$.

Παραδείγματα

α) $f(x,y)=e^{x^2+y^2}$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

Θεωρούμε ct το x και ct το y μετα άρα αντίστοιχα θα έχουμε:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=2x_0 e^{x_0^2+y_0^2}$$

και

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=2y_0 e^{x_0^2+y_0^2}, \quad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$$

και λόγω ότι οι

$\frac{\partial f}{\partial x}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ και $\frac{\partial f}{\partial y}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ είναι

συνεχείς άρα και η f συνεχώς διαφορίσιμη

(δηλ. $f\in C^1(\mathbb{R}^2)$)

Η κλίση της f στο $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ είναι $\nabla f(x,y)=$

$$=\operatorname{grad} f(x,y)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y),\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)=$$

$$=\left(2x e^{x^2+y^2}, 2y e^{x^2+y^2}\right)=2\underbrace{(x,y)}_{\in\mathbb{R}^2}\underbrace{e^{x^2+y^2}}_{\in\mathbb{R}}\in\mathbb{R}^2$$

β) $f(\bar{x})=\|\bar{x}\|^2$, $\bar{x}\in\mathbb{R}^n$, $\bar{x}=(x_1,\dots,x_n)$

$f(\bar{x})=\|\bar{x}\|^2=x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1,x_2,\dots,x_n)=2x_i$$

$$\nabla f(x_1,\dots,x_n)=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)(x_1,\dots,x_n)=(2x_1,\dots,2x_n)=2\bar{x}$$

γ)

$f(\bar{x})=\|\bar{x}\|=\sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}$

Άρα, $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x})=\frac{1}{2}\frac{2x_i}{\sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}}=\frac{x_i}{\|\bar{x}\|}$, $\bar{x}\neq\bar{0}$

Η f όχι μερικώς παραγωγίσιμη στο $\bar{x}_0=\bar{0}$

κλίση: $\nabla f(\bar{x})=\left(\frac{x_1}{\|\bar{x}\|},\dots,\frac{x_n}{\|\bar{x}\|}\right)=\frac{1}{\|\bar{x}\|}(x_1,\dots,x_n)=\frac{\bar{x}}{\|\bar{x}\|}$, $\bar{x}\neq\bar{0}$

$\Rightarrow \|\nabla f(\bar{x})\|=1$

Άσκηση για το σπίτι

Να εξετάσετε αν $\exists \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(0,\dots,0) \in \mathbb{R}$

Αρκεί νδο η $f$

όχι μερικώς παραγωγίσιμη στο $\bar{0}$

εξετάζουμε μέσω του ορισμού

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(\bar{0}+h\bar{e}_i)-f(\bar{0})}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h\bar{e}_i)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\|h\bar{e}_i\|}{h} =$$

$= \lim_{h\to 0} \dfrac{|h|}{h}$ = Με πλευρικά όρια $h\to 0^+$ και $h\to 0^-$ έχουμε το αντίστοιχο $+1$ και $-1$

άρα η $f$ όχι διαφορίσιμη (μερικώς) στο $\bar{0}$.